Soluzioni II prova di maturità per licei scientifici

Francesca Marchetti, Salvatore Failla, Martina Pitimada, Emilio Rossi,

Davide Cusseddu, Maria Teresa Ascione

19 Giugno 2026

PROBLEMI

Problema 1:

Punto a)

Per ricavare i parametri sostituiamo i dati ottenuti dalla tabella come indicato nel testo. Per l'intervallo (2016,2019) che corrisponde ad x in (0,3) risolveremo un sistema di 3 equazioni a 3 incognite, a, b e c. Negli altri due intervalli due equazioni di primo grado per trovare m e poi k. Utilizzo i punti (0,-6), (1, -16) e (3,-18), sostituendo i valori delle coordinate nell'espressione polinomiale.

$$\begin{cases} 16a-8b+4c=14 \\ a-b+c=4 \\ a+b+c=2 \end{cases}$$

Andando a risolvere, otteniamo:

$$\begin{cases} 16a-8b+4c=14 \\ a+c=4+b \\ 4+b+b=2 \end{cases} \begin{cases} 16a-8b+4c=14 \\ a+c=4+b \\ 2b=-2 \end{cases} \begin{cases} 16a-8b+4c=14 \\ a+c=3 \\ b=-1 \end{cases} \begin{cases} 16(3-c)+8+4c=14 \\ a=3-c \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(3-c)+8+4c=14 \\ a=3-c \\ b=-1 \end{cases} \begin{cases} 48-16c+8+4c=14 \\ a=3-c \\ b=-1 \end{cases} \begin{cases} -12c=-42 \\ a=3-c \\ b=-1 \end{cases} \begin{cases} c=7/2 \\ a=-1/2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Per gli anni dal 2020 al 2023 utilizzo il punto (4,-16)

$$\begin{aligned} y &= mx-24+\sin^2\pi x \\ 4m-24 &= -16 \\ 4m &= 8 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

Per gli anni dal 2023 al 2026 utilizzo il punto (7,-10)

$$\begin{aligned} y &= 2\cos 2\pi x + k \\ 2\cos 14\pi + k &= -10 \\ 2+k &= -10 \\ k &= -12 \end{aligned}$$

Punto b)

Continuità. La funzione $f(x)$ è continua negli intervalli aperti $[0,3)$, $(3,7)$ e $(7,10]$: in $[0,3)$ è una funzione polinomiale e quindi continua, mentre nei restanti $(3,7)$ e $(7,10]$ $f(x)$ è somma di funzioni lineari e seno (composto con la funzione potenza) e coseno che sono continue per ogni valore di x. Resta da verificare la continuità in $x=3$ e $x=7$.

Dalla definizione, $f(3)=2\cdot 6-24+\sin^2(3\pi)=-18$, mentre

$$\lim_{x\to 3^-}\left(-\frac{1}{2}(x-2)^4-(x-2)^3+\frac{7}{2}(x-2)^2-20\right)=-18,$$

pertanto $f(x)$ è continua anche per $x=3$.

In $x=7$ abbiamo $f(7)=2\cdot 7-24+\sin^2(7\pi)=-10$, mentre

$$\lim_{x\to 7^+} 2\cos(2\pi x)-12=-10,$$

pertanto $f(x)$ è continua anche per $x=7$. Abbiamo così dimostrato la continuità su tutto il dominio di definizione $[0,10]$.

Derivabilità. La funzione $f(x)$ è derivabile negli intervalli aperti $[0,3)$, $(3,7)$ e $(7,10]$: in $[0,3)$ è una funzione polinomiale e quindi derivabile, mentre nei restanti $(3,7)$ e $(7,10]$ $f(x)$ è definita da funzioni anch'esse derivabili per ogni x. In particolare, in $[0,3)$ abbiamo

$$f'(x)=-2(x-2)^3-3(x-2)^2+7(x-2),$$

in $(3,7)$ abbiamo

$$f'(x)=2+2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x),$$

mentre in $(7,10]$ abbiamo

$$f'(x)=-4\pi\sin(2\pi x).$$

Verifichiamo ora la derivabilità di f nel punto $x=3$, confrontando il limite destro e sinistro di f':

$$\lim_{x\to 3^-} f'(3)=\lim_{x\to 3^-} -2(x-2)^3-3(x-2)^2+7(x-2)=-2(3-2)^3-3(3-2)^2+7(3-2)=2$$

e

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3^+} 2+2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)=2+2\pi\sin(3\pi)\cos(3\pi)=2.$$

Quindi $f(x)$ è derivabile anche nel punto $x=3$.

Allo stesso modo, verifichiamo la derivabilità di f nel punto $x=7$:

$$\lim_{x\to 7^-} f'(x)=\lim_{x\to 7^-} 2+2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)=2+2\pi\sin(7\pi)\cos(7\pi)=2,$$

ma

$$\lim_{x\to 7^+} f'(x)=\lim_{x\to 7^+} -4\pi\sin(2\pi x)=-4\pi\sin(14\pi)=0.$$

Quindi nel punto $x = 7$ abbiamo un punto di non derivabilità. In particolare, essendoci discontinuità di salto per f', $x = 7$ è un punto angoloso di f.

Punti di estremo relativo. Per calcolare i punti di estremo relativo, calcoliamo i punti x diversi da $x = 7$ in cui $f'(x) = 0$.

In $[0,3]$ abbiamo $f'(x) = (x-2)(-2(x-2)^2-3(x-2)+7)$, quindi uno zero è $x_1 = 2$. Gli altri possono essere calcolati impostando $z = x-2$ e risolvendo $-2z^2-3z+7=0$, otteniamo $z = \frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-2)\cdot 7}}{-4} = -\frac{3\mp\sqrt{65}}{4}$. Quindi gli zeri per x sono $x_{2,3} = -\frac{3\mp\sqrt{65}}{4} + 2 = \frac{5\mp\sqrt{65}}{4}$. Questi valori sono tuttavia esterni all'intervallo $[0,3)$.

Riguardo $x_1 = 2$, abbiamo $f''(2) = 7 > 0$, quindi $f(2) = -20$ è un minimo di f. Invece, coerentemente con il testo del problema, $x = 0$ è punto di massimo locale, con $f(0) = -6$.
In $[3,7)$ dobbiamo risolvere $2 + 2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x) = 0$, che può essere scritto come $2 + \pi\sin(2\pi x) = 0$, quindi risolviamo rispetto a x, ottenendo $x = \pm\frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) + k$. Possiamo andare a cercare quante soluzioni ci siano nell'intervallo $[3,7)$ risolvendo alcune disequazioni

$$\frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) + k > 3$$
$$k > 3 - \frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) \approx 65{,}1$$
$$\frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) + k < 7$$
$$k < 7 - \frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) \approx 69{,}1$$
$$65{,}1 < k < 69{,}1$$

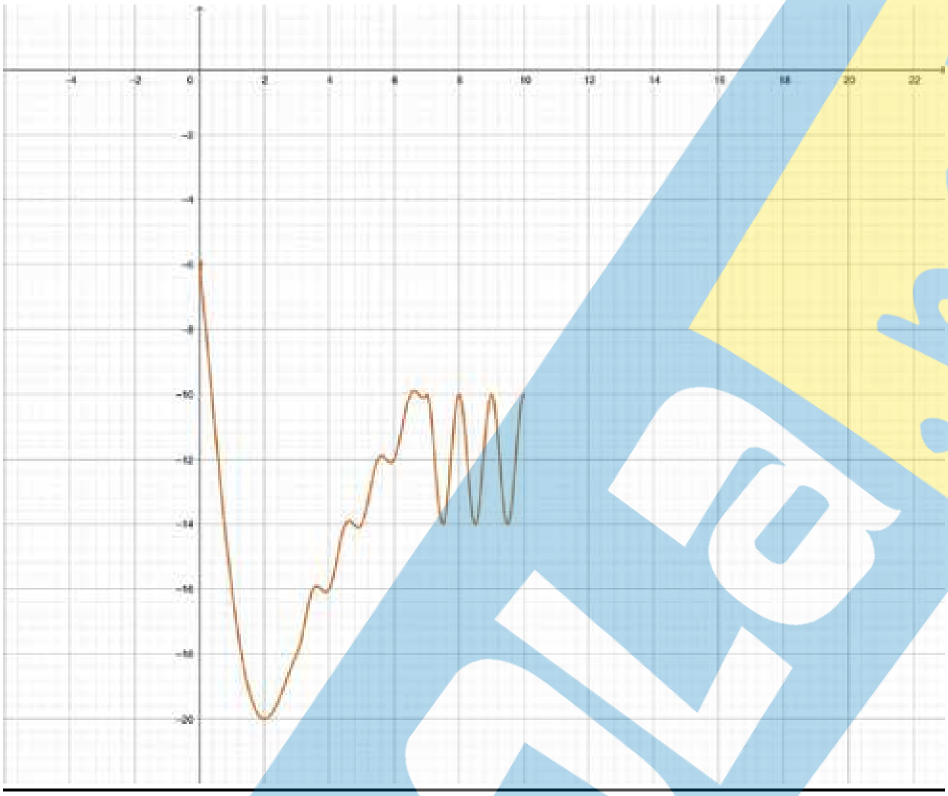
.

$$-\frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) + k > 3$$
$$k > 3 + \frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) \approx -59{,}1$$
$$-\frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) + k < 7$$
$$k < 7 + \frac{1}{2\pi}\arcsin(-2/\pi) \approx -55{,}1$$
$$-59{,}1 < k < -55{,}1$$

Possiamo concludere che la derivata prima di f ha 8 punti stazionari nell'intervallo $[3,7)$, che sono alternativamente punti di massimo e minimo locali, infatti la derivata seconda $f'' = 2\pi^2\cos(2\pi x)$ assume alternativamente valori negativi e positivi. In particolare, in questi punti di estremo relativo, f assume, in sequenza, i seguenti valori (approssimati alla seconda cifra decimale): -15.89, -16.10, -13.89, -14.10, -11.89, -12.10, -9.89, -10.10. Per completezza, includiamo il valore numerico dei punti stazionari, che hanno ascissa (approssimata), rispettivamente, 3.6, 3.89, 4.6, 4.89, 5.6, 5.89, 6.6, 6.89.
In $(7,10]$ dobbiamo risolvere $-4\pi\sin(2\pi x) = 0$, che corrisponde a trovare tutti gli zeri di $\sin(2\pi x)$ in

$(7,10]$, che corrispondo a tutti i valori di $2x$ interi, ossia $x = 7.5,8,8.5,9,9.5,10$, alternativamente punti di minimo e massimo locale, che corrispondono ai minimi -14 e ai massimi relativi -10 per la funzione $f(x) = 2\cos(2\pi x) - 12$.

Resta da verificare cosa succede per $x = 7$, punto di nonderivabilità per f. Sappiamo che $f(7) = -10$, che è quindi un altro massimo locale di f.



Punto c)

La funzione $f(x)$ non soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange, in quanto, come abbiamo visto al punto sopra, non è derivabile in $x = 7$ interno all'intervallo.
Visto che non possiamo applicare il Teorema di Lagrange, per mostrare che esiste tale s applichiamo il Teorema dei Valori Intermedi. In particolare, essendo un polinomio, $f'(x)$ è continua in $[0,2]$ e $f'(0) = -10$, mentre $f'(2) = 0$. Dato che $\frac{f(10)-f(0)}{10} = -\frac{2}{5} \in (-10,0)$, possiamo concludere che esiste almeno un valore $s \in [0,2]$ tale che $f'(s) = \frac{f(10)-f(0)}{10}$.
Si osservi che lo stesso ragionamento può essere applicato anche nell'intervallo $(7,10]$.

Punto d)

Il teorema della media integrale è applicabile in quanto la funzione $f(x)$ è continua su tutto l'intervallo $[0,10]$.
La variazione media è calcolata da

$$\Delta h = \frac{1}{10} \int_0^{10} f(x) dx.$$

Per calcolarla esplicitamente, dobbiamo calcolare l'integrale di f a tratti. Infatti,

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^3 -\frac{1}{2}(x-2)^4-(x-2)^3+\frac{7}{2}(x-2)^2-20\ dx + \int_3^7 2x-24+\sin^2(\pi x)\ dx + \int_7^{10} 2\cos(2\pi x)-12\ dx$$

In particolare, il primo integrale è:

$$\int_0^3 -\frac{1}{2}(x-2)^4-(x-2)^3+\frac{7}{2}(x-2)^2-20\ dx = \left[-\frac{1}{10}(x-2)^5-\frac{1}{4}(x-2)^4+\frac{7}{6}(x-2)^3-20x\right]_0^3 = -\frac{1}{10}-\frac{1}{4}+\frac{7}{6}-60+\frac{1}{10}(-2)^5+\frac{1}{4}(-2)^4-\frac{7}{6}(-2)^3 = -\frac{981}{20}.$$

Il secondo integrale

$$\int_3^7 2x-24+\sin^2(\pi x)\ dx = \left[x^2-24x-\frac{\sin(\pi x)\cos(\pi x}{\pi}\right]_3^7$$
$$= 7^2-24\cdot 7-\frac{\sin(7\pi)\cos(7\pi}{\pi}-3^2-24\cdot 3-\frac{\sin(3\pi)\cos(3\pi}{\pi} = -56.$$

Il terzo è

$$\int_7^{10} 2\cos(2\pi x)-12\ dx = \left[\frac{1}{\pi}\sin(2\pi x)-12x\right]_7^{10} = \frac{1}{\pi}\sin(20\pi)-120-\frac{1}{\pi}\sin(14\pi)-84 = -36.$$

Quindi abbiamo che la variazione media è

$$\Delta h = \frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{10}\left(-\frac{981}{20}-56-36\right) = -14.105\text{dm}.$$

Per concludere, la differenza di volume di acqua tra inizio 2016 e inizio del 2026 è data da

$$\Delta V = 57.10^9\text{dm}^2\cdot 14.105\text{dm} = 803.985\cdot 10^9\text{dm}^3 \approx 8.04\cdot 10^{11}\text{litri}.$$