

Problema 2:

Dominio di f_a è $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dominio di g è $D_g = \mathbb{R}$.

Per intervalli di monotonia di f_a al variare di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, studiamo il segno della derivata:

$$f'_a(x) = \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{2ax^2 - 2ax - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}$$

- $D > 0$: $(x-1)^2 > 0 \quad x \in D_{f_a}$
- $N \geq 0$: $ax(x-2) \geq 0$, due casi distinti:
 - a. Caso $a > 0$: $N > 0$ sse $x(x-2) \geq 0$, che dà $x \geq 2$ oppure $x < 0$.
 - b. Caso $a < 0$: $N > 0$ sse $x(x-2) \leq 0$, che dà $0 \leq x \leq 2$

Mettendo insieme lo studio del segno della derivata prima con il dominio, si ottengono i seguenti intervalli di monotonia di f_a :

1. Caso $a > 0$: f_a è monotona crescente su $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ ed è monotona decrescente su $(0, 1) \cup (1, 2)$.
2. Caso $a < 0$: f_a è monotona crescente su $(0, 1) \cup (1, 2)$ ed è monotona decrescente su $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Calcoliamo la derivata di

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & x > 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{-(x^2+1) + 2x^2}{(x^2+1)^2} & x < 0 \\ \frac{x^2+1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & x < 0 \\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & x > 0 \end{cases}$$

Le condizioni da imporre affinché la retta r sia tangente a ϕ_a e γ sono:

- $f'_a(x) = 0$ che dà $x = 0$ e $x = 2$
- $g'(x) = 0$ che dà $x = \pm 1$
- $f_a(0) = k$ e $f_a(2) = k$ che danno $k = 0, a = \frac{k}{4}$

- $g(\pm 1) = k$ che dà $a = \frac{1}{2}$

in definitiva otteniamo, $a = \frac{1}{8}$ e $k = \frac{1}{2}$ come unica soluzione.

punto b)

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B),$$

$$x_A \neq 0, \quad x_B > 0.$$

A punto stazionario di φ_a

B punto stazionario di \mathcal{V}

$$\overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$f'_a(x) = \frac{a(x^2 - 2x)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow ax^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Escludiamo il punto $x = 0$.

$$f_a(2) = \frac{a \cdot 2^2}{2-1} = 4a = y_A.$$

Quindi $x_A = 2$ e $y_A = 4a$.

Per trovare il punto B ,

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{\frac{|x|}{x}(x^2 + 1) - 2|x|x}{(x^2 + 1)^2} = 0 &\Rightarrow \frac{|x|}{x}(x^2 + 1) - 2|x|x = 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{x} + \frac{x}{|x|} = 2|x| \cdot x \Rightarrow x^3 + x = 2|x|^2x \\ &\Rightarrow x^3 + x = 2x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)x = 0 \end{aligned}$$

quindi le soluzioni sono $x = 0, x = -1, x = 1$. Siccome richiediamo $x_B > 0$, consideriamo solo $x_B = 1$. Mentre $y_B = g(1) = 1/2$.

$$d_a = \overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)^2}$$

$$d'_a = \frac{2 \left(\frac{1}{2} - 4a\right) (-4)}{2\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)^2}} = \frac{2 - 16a}{2\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)^2}}.$$

Quindi

$$d'_a = 0 \Leftrightarrow 2 - 16a = 0, \text{ e quindi } a = \frac{1}{8}$$

punto c)

Studio funzione $f_{\frac{1}{8}}(x)$

$$f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1}$$

Dominio

$$1. \quad x - 1 \neq 0 \quad x \neq 1$$

Il dominio della funzione è:

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Studio del segno della funzione:

$$f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1} > 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8}\right)x^2 > 0 & \quad x \in D_f \\ x - 1 > 0 & \quad x > 1 \end{aligned}$$

Pertanto, la funzione è positiva per $x > 1$.

Intersezioni con assi

Intersezione con asse y

Poniamo $x = 0$

$$f_{\frac{1}{8}}(0) = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)0^2}{0-1} = 0$$

Pertanto, $(0,0)$ è un punto di intersezione.

Intersezione con asse x

Poniamo:

$$f_{\frac{1}{8}}(x) = 0$$

Pertanto,

$$\frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1} = 0 \quad x = 0$$

È lo stesso punto trovato prima.

Si ha dunque un solo punto di intersezione e, questo coincide con l'origine degli assi.

Limiti agli estremi aperti del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x} = \frac{1}{8}x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x} = \frac{1}{8}x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{1^- - 1} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{1^+ - 1} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{0^+} = +\infty$$

Verifica presenza asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x^2 - x} \sim \frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x^2} = \frac{1}{8}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{8}\right)x^2}{x-1} - \frac{1}{8}x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{8}x}{x-1} \sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{8}x}{x} = \frac{1}{8}$$

È dunque presente un asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$ avente la seguente espressione:

$$y = \frac{1}{8}(x + 1)$$

Derivata prima:

$$f_{\frac{1}{8}}(x)' = \frac{\frac{1}{4}x(x-1) - \frac{1}{8}x^2}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x}{(x-1)^2}$$

Studio della monotonia della funzione:

$$\frac{\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x}{(x-1)^2} > 0$$

Essendo una funzione razionale il segno dipende da quello del numeratore e da quello del denominatore:

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x > 0$$

$$\frac{1}{4}x\left(\frac{x}{2} - 1\right) > 0 \quad x < 0 \quad x > 2$$

$$(x-1)^2 > 0, \quad x \in D_f$$

La funzione è crescente per $x < 0$ e per $x > 2$.

Classificazione dei punti stazionari:

$x = 0$ è un punto di massimo locale poic e la funzione non è limitata superiormente

$x = 2$ è un punto di minimo locale poic e la funzione non è limitata inferiormente

Derivata seconda

$$f_{\frac{1}{8}}(x)'' = \frac{\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)(x-1)^2 - \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^3}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^3} > 0$$

$$x > 1$$

La funzione pertanto è convessa per $x > 1$ e concava per $x < 1$.

Studio funzione $g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2 + 1}, & x < 0 \\ \frac{x}{x^2 + 1}, & x > 0 \end{cases}$$

Dominio

$x^2 + 1 \neq 0$ vera per ogni valore di x

$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

Studio del segno

caso $x < 0$

$$\frac{-x}{x^2 + 1} > 0 \text{ se } x < 0$$

SKUOLA

fev.net

caso $x > 0$

$$\frac{x}{x^2 + 1} > 0 \text{ se } x > 0$$

La funzione è dunque sempre positiva.

Intersezione con assi

Intersezione con asse y

Si pone $x = 0$

$$g(0) = \frac{|0|}{0^2 + 1} = 0$$

$(0,0)$ è un punto di intersezione

Intersezione con asse x

Si pone $g(x) = 0$

$$\frac{|x|}{x^2 + 1} = 0 \quad x = 0$$

si trova nuovamente $x = 0$ e $(0,0)$ è un punto di intersezione

Limiti agli estremi aperti del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

Non sono presenti asintoti obliqui.

Derivata prima

$$g(x)' = \begin{cases} \frac{(-1)(x^2 + 1) + x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}, & x < 0 \\ \frac{(x^2 + 1) + x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}, \quad x < 0$$

$$= \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}, \quad x > 0$$

caso $x < 0$

$$\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad x^2 - 1 > 0 \quad x^2 > 1 \quad x < -1$$

caso $x > 0$

$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad x^2 - 1 < 0 \quad x^2 < 1 \quad x < 1$$

La funzione è crescente da $(-\infty, -1)$ e tra $(1, +\infty)$

$x = -1$ e $x = 1$ sono punti di massimo globale

Discontinuità

Avendo al numeratore il valore assoluto $|x|$, eseguendo i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 1$$

Notiamo che assumono lo stesso valore ma di segno opposto: si tratta di un punto di non derivabilità anche se la funzione è continua.

Il punto $x = 0$ è un punto angoloso.

Derivata seconda

$$g(x)'' = \frac{2x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4}, \quad x < 0$$

$$= \frac{-2x(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1)2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4}, \quad x > 0$$

$$= \frac{-2x^3 + 6x}{(x^2 + 1)^3}, \quad x < 0$$

$$= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}, \quad x > 0$$

caso $x < 0$

$$\frac{-2x^3 + 6x}{(x^2 + 1)^3} > 0$$

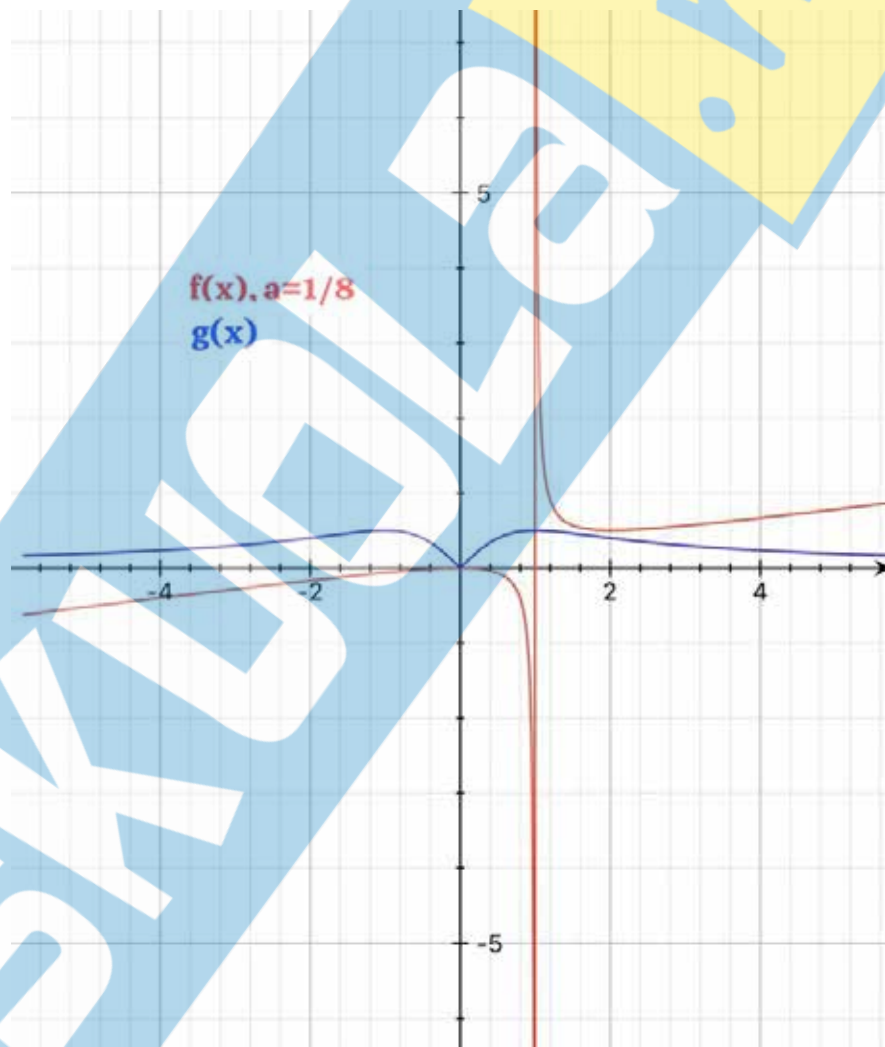
$$-2x^3 + 6x > 0 \quad x < -\sqrt{3}$$

(le radici $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$) non si considerano per il caso $x < 0$

$$2x^3 - 6x > 0 \quad x > \sqrt{3}$$

(le radici $x = 0$ e $x = -\sqrt{3}$) non si considerano per il caso $x > 0$

Pertanto, la funzione è convessa per gli intervalli $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, +\infty)$



Facendo un confronto grafico, appare evidente che la disequazione:

$$f_1(x) > g(x)$$

è vera solo per valori di $x > 1$.

punto d)

Risolviamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{|x|}{x^2+1} dx &= \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{-x}{x^2+1} dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_{\sqrt{3}}^0 + \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(0^2+1) - \frac{1}{2} \ln(3+1) + \frac{1}{2} \ln(3+1) - \frac{1}{2} \ln(0^2+1) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(4) - \frac{1}{2} \ln(1) = \ln(4) \end{aligned}$$