

$$A_{\text{esclusione}} = r^2 \arccos\left(\frac{d}{r}\right) - d\sqrt{r^2 - d^2} \approx 0,127$$

Avendone due, raddoppiamo questo valore e otteniamo  $A_{\text{esclusione totale}} = 0,254$

L'area del cerchio tutta è  $A_{\text{cerchio completo}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 \approx 1,396$

Quindi l'area del quadrato che riesco a coprire è

$$A_{\text{coperta}} = A_{\text{cerchio completo}} - A_{\text{esclusione totale}} = 1,396 - 0,254 = 1,142$$

Essendo la metà dell'area del cerchio esattamente 1, riesco a coprire più di metà cerchio; dunque, nel dibattito, ha ragione Cecilia.

## Quesito 2:

Ricordando la definizione di *tetraedro regolare*:

**Definizione 1 (Tetraedro regolare).** *Un tetraedro regolare è un solido formato da 4 facce congruenti, in cui ciascuna faccia è un triangolo equilatero.*

Basta quindi verificare che i 4 punti individuano 6 lati tutti congruenti.

Usiamo la formula per il calcolo della distanza tra due punti  $P(x_P, y_P, z_P)$ ,  $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$  in  $\mathbb{R}^3$ :

$$d(P, Q) = \overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

che ci dà:

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-4 - 5)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{1 + 81 + 16} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(A, C) = \overline{AC} = \sqrt{(2 + 6)^2 + (-4 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{64 + 25 + 9} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(A, D) = \overline{AD} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-4 - 4)^2 + (3 - 8)^2} = \sqrt{9 + 64 + 25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(B, C) = \overline{BC} = \sqrt{(3 + 6)^2 + (5 - 1)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(B, D) = \overline{BD} = \sqrt{(3 + 1)^2 + (5 - 4)^2 + (-1 - 8)^2} = \sqrt{16 + 1 + 81} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$d(C, D) = \overline{CD} = \sqrt{(-6 + 1)^2 + (1 - 4)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{25 + 9 + 64} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Per questo ci sono due possibili strade, una che sfrutta il punto (a) (più breve), una seconda più contosa ma che permette comunque di arrivare alla soluzione.

### Metodo 1

La sfera passa per i quattro punti che individuano il tetraedro, ed è quindi circoscritta ad esso: poiché dal punto precedente sappiamo che il tetraedro è regolare, si ha che il centro della sfera coincide con il baricentro dello stesso, da cui

$$\begin{aligned}
 C(x_C, y_C, z_C) &= \left( \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right) = \\
 &= \left( \frac{2 + 3 - 6 - 1}{4}, \frac{-4 + 5 + 1 + 4}{4}, \frac{3 - 1 + 0 + 8}{4} \right) = \\
 &= \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Il piano ha vettore normale dato dal raggio passante per A, quindi:

$$\bar{n} = (\alpha, \beta, \gamma) = A - C = \left( 2 + \frac{1}{2}, -4 - \frac{3}{2}, 3 - \frac{5}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{1}{2} \right) = (5, -11, 1)$$

per cui l'equazione del piano  $\pi$  tangente in A alla sfera di centro C è:

$$\begin{aligned}
 \pi: \quad \alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) &= 0 \\
 \frac{5}{2}(x - 2) + -\frac{11}{2}(y + 4) + \frac{1}{2}(z - 3) &= 0 \\
 5x - 11y + z - 57 &= 0
 \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}
 \pi: \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= 0 \\
 5x - 11y + z + \delta &= 0 \\
 5x - 11y + z + \delta &= 0
 \end{aligned}$$

e poi imponiamo il passaggio per A:

$$\begin{aligned}
 5 \cdot 2 - 11 \cdot (-4) + 3 + \delta &= 0 \\
 10 + 44 + 3 + \delta &= 0 \\
 \delta &= -57
 \end{aligned}$$

e si ritrova la medesima equazione per il piano:

$$\pi: 5x - 11y + z - 57 = 0$$

## Metodo 2

Nel caso in cui non ci si fosse accorti del fatto che il centro della sfera coincidesse con il baricentro del tetraedro, si poteva comunque arrivare al medesimo risultato procedendo come segue:

-si trova dapprima l'equazione cartesiana della sfera imponendo il passaggio per i quattro punti:

Equazione della sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

Imponiamo il passaggio per i punti  $A(2, -4, 3)$ ,  $B(3, 5, -1)$ ,  $C(-6, 1, 0)$ ,  $D(-1, 4, 8)$ .

Punto A

$$4 + 16 + 9 + 2a - 4b + 3c + d = 0 \quad 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0$$

Punto B

$$9 + 25 + 1 + 3a + 5b - c + d = 0 \quad 3a + 5b - c + d + 35 = 0$$

Punto C

$$36 + 1 + 0 - 6a + b + d = 0 \quad -6a + b + d + 37 = 0$$

Punto D

$$1 + 16 + 64 - a + 4b + 8c + d = 0 \quad -a + 4b + 8c + d + 81 = 0$$

per cui si ottiene il sistema di quattro equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ 3a + 5b - c + d + 35 = 0 \\ -6a + b + d + 37 = 0 \\ -a + 4b + 8c + d + 81 = 0 \end{cases}$$

Sottraiamo la prima equazione dalle altre per eliminare la dipendenza da  $d$ :

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a + 9b - 4c + 6 = 0 \\ -8a + 5b - 3c + 8 = 0 \\ -3a + 8b + 5c + 52 = 0 \end{cases}$$

isoliamo  $a$  dalla seconda e sostituiamo nella terza e quarta:

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a = -9b + 4c - 6 \\ -8(-9b + 4c - 6) + 5b - 3c + 8 = 0 \\ -3(-9b + 4c - 6) + 8b + 5c + 52 = 0 \end{cases}$$

e svolgendo i calcoli

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a = -9b + 4c - 6 \\ -32c + 72b + 48 + 5b - 3c + 8 = 0 \\ -12c + 27b + 18 + 8b + 5c + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a = -9b + 4c - 6 \\ 77b - 35c + 56 = 0 \\ 35b - 7c + 70 = 0 \end{cases}$$

Dividiamo per 7 le ultime due, isoliamo  $c$  dall'ultima e sostituendo arriviamo a determinare tutti e quattro i parametri

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a = -9b + 4c - 6 \\ 11b - 5c + 8 = 0 \\ 5b - c + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a = -9b + 4c - 6 \\ 11b - 5(5b + 10) + 8 = 0 \\ c = 5b + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a = -9b + 4c - 6 \\ 11b - 25b - 50 + 8 = 0 \\ c = 5b + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 4b + 3c + d + 29 = 0 \\ a = -9b + 4c - 6 \\ -14b - 42 = 0 \\ c = 5b + 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 d &= -2a + 4b - 3c - 29 = -2 - 12 + 15 - 29 = -28 \\
 a &= -9b + 4c - 6 = +27 - 20 - 6 = 1 \\
 b &= -\frac{42}{14} = -3 \\
 c &= 5b + 10 = -15 + 10 = -5
 \end{aligned}$$

L'equazione della sfera è quindi:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 5z - 28 = 0$$

Una volta trovata l'equazione della sfera, per il centro sfruttiamo la formula:

$$C(x_C, y_C, z_C) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

infine si procede come nel metodo precedente.

### Quesito 3:

Data la definizione  $M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)$ , possiamo applicare la formula inversa del logaritmo per estrarre A:

$$10^M = \frac{A}{A_0} \quad A = A_0 10^M$$

Quindi, utilizzando i dati forniti sui valori di M nei due casi, ottengo:

$$A_1 = A_0 10^{M_1} = A_0 10^{6,5}$$

$$A_2 = A_0 10^{M_2} = A_0 10^{6,0}$$

Il quesito richiede di calcolare il rapporto tra le due grandezze:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 10^{6,5}}{A_0 10^{6,0}} = 10^{0,5} = \sqrt{10}$$

Adesso invece riprendiamo la legge di Gutenberg-Richter, riportata nel testo, e applichiamo la formula inversa per estrarre E:

$$\log_{10} \frac{E}{E_0} = 1,5M + 4,8 \quad \frac{E}{E_0} = 10^{1,5M+4,8} \quad E = E_0 10^{1,5M+4,8}$$

Calcoliamo l'energia per i due casi:

$$E_1 = E_0 10^{1,5 \cdot 6,5 + 4,8} = E_0 10^{14,55}$$

$$E_2 = E_0 10^{1,5 \cdot 6,0 + 4,8} = E_0 10^{13,80}$$

La variazione percentuale di energia tra il primo e il secondo terremoto è data da:

$$\% \Delta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} \cdot 100 = \frac{E_0 10^{13,80} - E_0 10^{14,55}}{E_0 10^{14,55}} \cdot 100 = \frac{E_0 (10^{13,80} - 10^{14,55})}{E_0 10^{14,55}} \cdot 100 =$$