Quesito 5

Sappiamo che la funzione ha come asintoti verticali $x = \sqrt{3}$ e in $x = -\sqrt{3}$ quindi possiamo sfruttare la definizione di asintoto verticale per trovare un parametro

Per avere un asintoto verticale in $x = \sqrt{3}$ deve valere

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} h\ln (x^2 + k)^5 = -\infty$$

Oppure

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} h\ln (x^2 + k)^5 = +\infty$$

La funzione logaritmo diverge quando il suo argomento tende a 0^+, quindi dobbiamo avere che il limite del suo argomento tende a zero:

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} (x^2 + k)^5 = [(\sqrt{3})^2 + k]^5 = 3 + k = 0$$

Da cui

$$k = -3.$$

Lo stesso vale automaticamente per $x = -\sqrt{3}$, poiché l'argomento del logaritmo dipende da x^2: infatti $(-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$.

Si noti che abbiamo trascurato il valore di h poiché non influenza l'andamento del limite, sappiamo che è diverso da zero e l'unica cosa che potrebbe far variare e l'andamento a + o - ∞.

Quindi la funzione diventa:

$$\mathrm{y(x)} = h\ln (x^2 - 3)^5 = 5hln(x^2 - 3)$$

Troviamo ora i punti in cui la curva interseca l'asse x imponendo y=0 :

$$5hln(x^2 - 3)^5 = 0$$

Possiamo dividere tutto per $5h$ visto che sappiamo che $h \neq 0$ e otteniamo:

$$ln(x^2 - 3)^5 = 0$$

$$(x^2 - 3)^5 = 1$$

$$x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$\mathrm{x} = \pm 2$$

Da cui otteniamo i punti d'intersezione *A(−2;0)* e *B(2; 0)*.

Calcoliamo la pendenza della tangente facendo la derivata della funzione e otteniamo:

$$y'(x) = \frac{10hx}{x^2 - 3}$$

E la calcoliamo nel punto di tangenza A (o equivalentemente in B):

$$y'(-2) = \frac{10h(-2)}{(-2)^2 - 3} = \frac{-20h}{1} = -20h$$

Ora usiamo la formula della retta che passa pe un punto e calcoliamo la tangente in A:

$$\mathrm{y} - \mathrm{y}_A = \mathrm{m}_A\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_A)$$

Sostituendo otteniamo:

$$\mathrm{y} - 0 = -20h\,(\mathrm{x} + 2)$$

Ovvero:

$$y = -20h\,(\mathrm{x} + 2)$$

Questa è dunque l'equazione della retta tangente in A. Sappiamo che passa per il punto C (0;-4), questa informazione ci permetterà di trovare il parametro h semplicemente sostituendo le coordinate di C nell'ultima equazione trovata:

$$-4 = -20h(0 + 2)$$

Da cui:

$$h = \frac{1}{10}$$